CHAPITRE 2 – CIRCUIT MONOPHASÉ EN RÉGIME SINUSOÏDAL

Importance du régime sinusoïdal

1- **La plus grande partie de l'énergie électrique est produite sous forme de courant alternatif sinusoïdal ;**

2- **les fonctions sinusoïdales sont simples à manipuler mathématiquement et électriquement**;

3-**toute fonction périodique de forme quelconque peut être décomposée en une somme de signaux sinusoïdaux.**

Circuits linéaires en régime sinusoïdal

Un circuit est linéaire s'il est constitué de résistances (R), d'inductances (L) et de capacités (C) dont les valeurs ne dépendent pas du courant qui les traverse.

Définitions

Une tension sinusoïdale est une grandeur périodique et alternative pouvant s'écrire sous la forme : $v(t) = V_{\max} \sin(\omega t + \theta_u)$

$V_{\max}$ **: est la valeur maximum de** $v(t)$

t **: est le temps en secondes (s)**

ω **: est la pulsation en radians par seconde ;**

$(\omega t + \theta_u)$ **: est la phase instantanée en radians (rad) ;**

θ_u **: est la phase à l'origine en radians (rad).**

Valeur moyenne

$$< v(t) > = \frac{1}{T}\int_0^T v(t).dt = 0$$

Valeur efficace

$$V_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T v^2 dt} = \frac{V_{\max}}{\sqrt{2}}$$

Exercice1.2. $v(t) = 230\sqrt{2}\sin(315t+1)$. *Déduire de cette équation les grandeurs :* $\omega; \varphi; T; f; V_{max}; V_{eff}$

Exercice1.2

$$v(t) = 230\sqrt{2}\sin(314t+1)$$

A partir de cette équation, **déduire** $\omega, \varphi, T, f, V_{max}, V_{eff}$

$$\omega = 314 rad/\sec$$

$$\varphi = 1 rad$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{314} \approx 20 ms$$

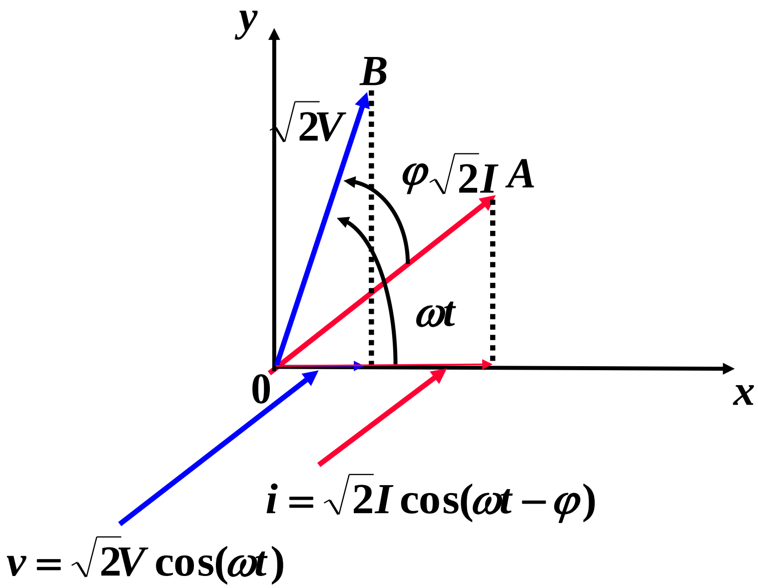
$$f = \frac{1}{T} = 50 Hz$$

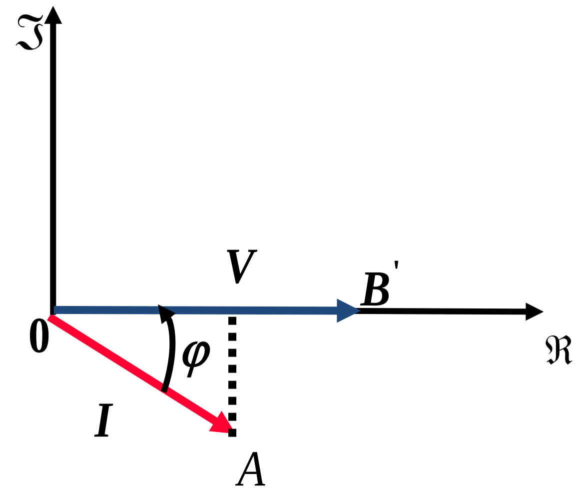
$$V_{max} = 230\sqrt{2} = 325V$$

$$V_{eff} = \frac{V_{max}}{\sqrt{2}} = 230V$$

2- REPRESENTATION DE FRESNEL

Toute grandeur sinusoïdale (tension ou courant) sera représentée par un vecteur de longueur sa valeur efficace et d'angle sa phase à l'origine.





1.On cherche à supprimer la variable de temps

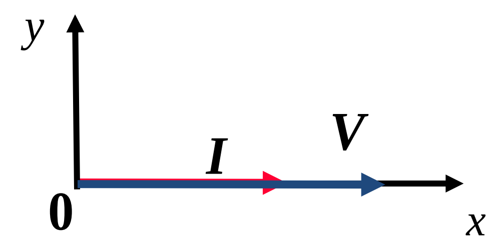
2. Si les deux signaux sont de même pulsation ***w***, on fige l 'angle ***wt à 0.***

3. On fait abstraction de l 'angle ***wt*** pour ne conserver que le décalage φ

4. De même, les longueurs des vecteurs correspondent dorénavant aux valeurs efficaces.

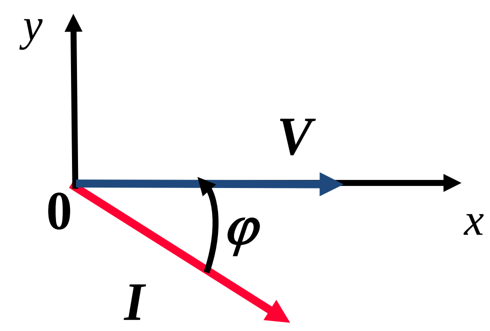
Le déphasage entre V et I $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$

Récepteur purement **résistive**, le courant et la tension sont en phase



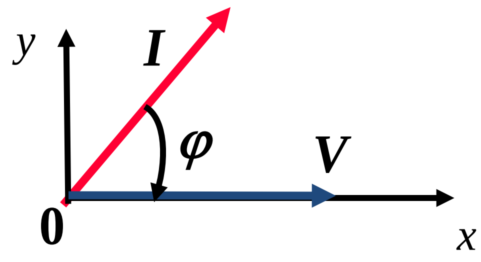
$$\varphi = 0$$

Récepteur **inductif**, le courant est en arrière sur la tension



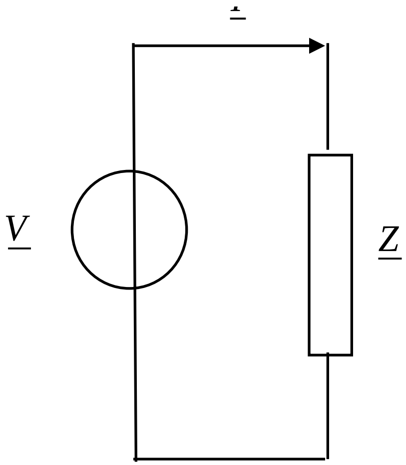
$$\varphi > 0$$

Récepteur **capacitif**, le courant est en avance sur la tension

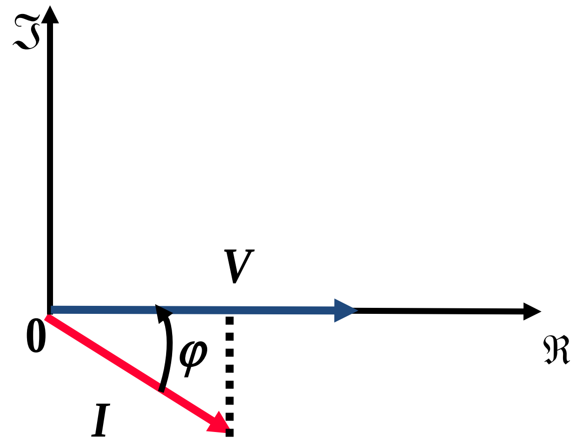


$$\varphi < 0$$

Exercice 2.2 : Considérons un dipôle Z inductive (Figure 1) traversé par un courant I et ayant entre ses bornes une tension V. Donnez les représentations vectorielles et les notations complexes de la tension V à ses bornes et du courant I le traversant. On considère la tension V à l'origine des phases.



Exercice 2.2



$$\underline{V} = Ve^{j0} = V + j0 = V$$

$$\underline{Z} = \frac{\underline{V}}{\underline{I}} e^{j\varphi}$$

$$I = \frac{Ve^{j0}}{Ze^{j\varphi}} = \frac{V}{Z}e^{-j\varphi} = Ie^{-j\varphi}$$

$$\underline{I} = I * e^{-j\varphi} = I(\cos\varphi - j\sin\varphi)$$

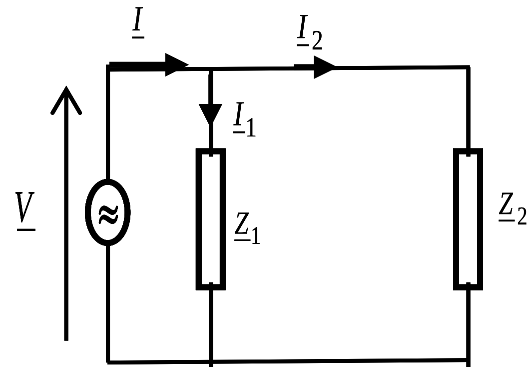
3- PROPRIETES

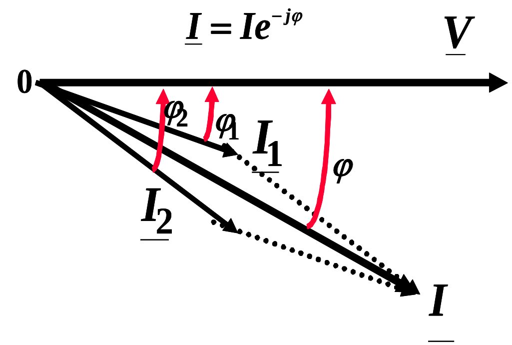
Somme

La somme de deux grandeurs sinusoïdales de pulsation ω est une grandeur sinusoïdale de même pulsation.

Exercice 3.2 : On donne le montage ci-dessous. Tracez la représentation vectorielle de $\underline{I}$ (Figure 2) et donnez les expressions de sa valeur efficace I et de son déphasage φ.

Exercice 3.2





$$\underline{I_1} = I_1 \cos\varphi_1 - jI_1 \sin\varphi_1 \qquad \underline{I_2} = I_2 \cos\varphi_2 - jI_2 \sin\varphi_2$$

$$\underline{I} = \underline{I_1} + \underline{I_2} = (I_1 \cos\varphi_1 + I_2 \cos\varphi_2) - j(I_1 \sin\varphi_1 + I_2 \sin\varphi_2)$$

$$I = \sqrt{(I_1 \cos\varphi_1 + I_2 \cos\varphi_2)^2 + (-I_1 \sin\varphi_1 - I_2 \sin\varphi_2)^2}$$

$$\varphi = \arctan \frac{I_1 \sin\varphi_1 + I_2 \sin\varphi_2}{I_1 \cos\varphi_1 + I_2 \cos\varphi_2}$$

Dérivation

La dérivation revient à multiplier la valeur efficace par ***w*** et à déphaser en avant de : $\frac{\pi}{2}$

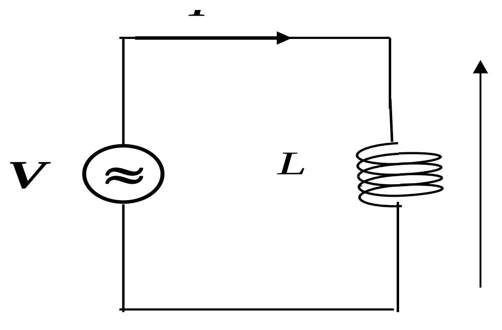
$$\frac{d}{dt}i(t) \rightarrow j\omega \underline{I}$$

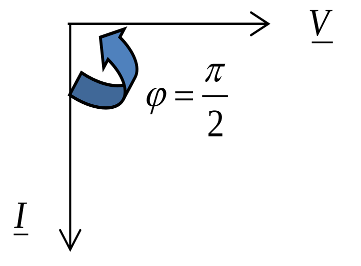
Intégration

L 'intégration revient à diviser la valeur efficace par ***w*** et à déphaser en arrière de : $\frac{\pi}{2}$

$$\int_0^t i(t')dt' \rightarrow \frac{1}{j\omega}\underline{I} = -\frac{j}{\omega}\underline{I}$$

Exercice 4.2 : Donnez l'expression complexe de la tension $\underline{V}$ et sa représentation vectorielle du dipôle (Figure 3) ci-dessous. $\underline{V} = j\omega L\underline{I}$





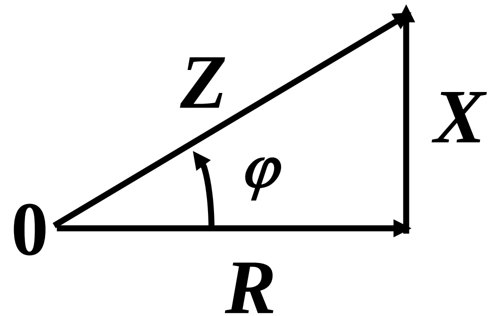
$$v_L = L\frac{d}{dt}i(t)$$

$$\underline{V} = j\omega L\underline{I}$$

Impédance complexe

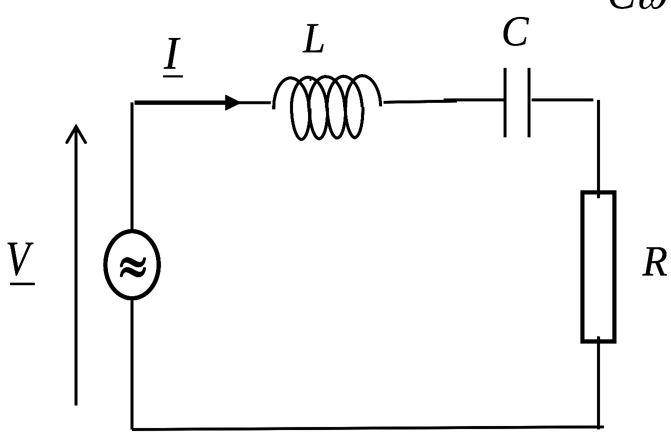
L'impédance complexe peut s'écrire sous la forme : $\underline{Z} = R + jX$

Le triangle des impédances est



Exercice 5.2 On donne le circuit RLC série ci-dessous. Donnez la notation complexe et la représentation vectorielle de la tension à ses bornes (Figure 5). Calculer la valeur efficace I et sa phase φ

$\underline{V} = 100e^{j0}V$ $\quad f = 50Hz$ $\quad R = 20\Omega$ $\quad -\dfrac{1}{C\omega} = -5\Omega$ $\quad L\omega = 10\Omega$

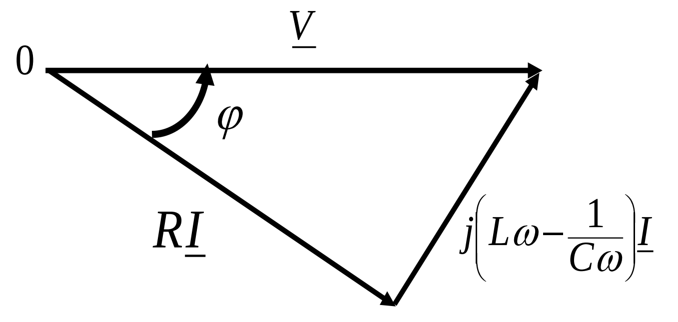


$$\underline{V} = R\underline{I} + jL\omega\underline{I} - j\frac{1}{C\omega}\underline{I} = R\underline{I} + j\underline{I}\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$$

$$X = \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right); \rightarrow L\omega > -\frac{1}{C\omega} \rightarrow X > 0 \rightarrow \underline{Z_{eq}} = 20.615e^{j14} \rightarrow \varphi = 14^{\circ}$$

$$\underline{V} = \underline{Z_{eq}} \times \underline{I} = 20.615e^{j14} \times \underline{I}$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{V}}{\underline{Z_{eq}}} = 4.85e^{-j14}A$$



4. Puissances en régime sinusoïdal

La puissance instantanée $p(t) = v(t) \times i(t)$

La puissance moyenne $P = \dfrac{1}{T}\int_0^T v(t) \times i(t)\,dt$

$$p(t) = 2VI \times \frac{1}{2}\left(\cos(2\omega t - \varphi) + \cos\varphi\right) = VI\cos\varphi + VI\cos(2\omega t - \varphi)$$

$$VI\cos(2\omega t - \varphi) = 0$$

La puissance active $P = VI\cos\varphi$ **Unité : le watt (W).**

La puissance réactive $Q = VI\sin\varphi$ **Unité : le (VAR).**

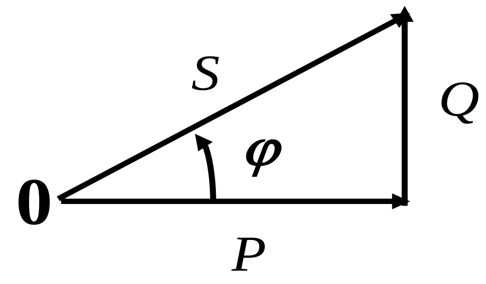
La puissance apparente $S = VI$ **Unité : le (VA).**

$$\underline{S} = \left|\underline{S}\right| \times e^{j\varphi} = \underline{V_s} \times \underline{I_1}^*$$

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i = 0 - \varphi_i = -\varphi_i$$

le triangle de puissances

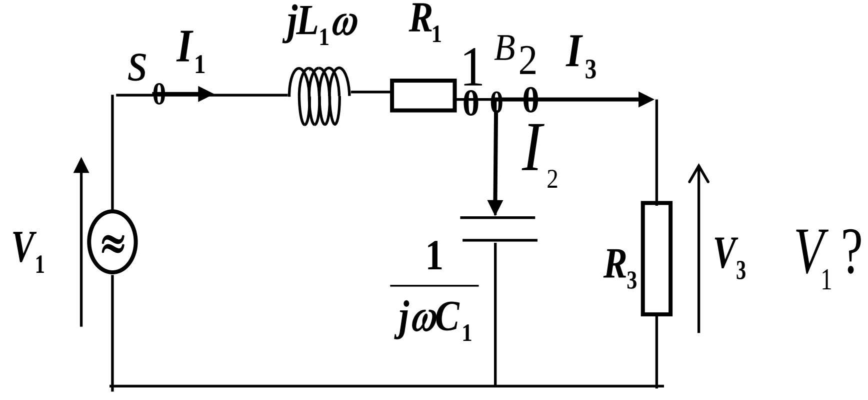
$$\underline{S} = P + jQ \qquad S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$



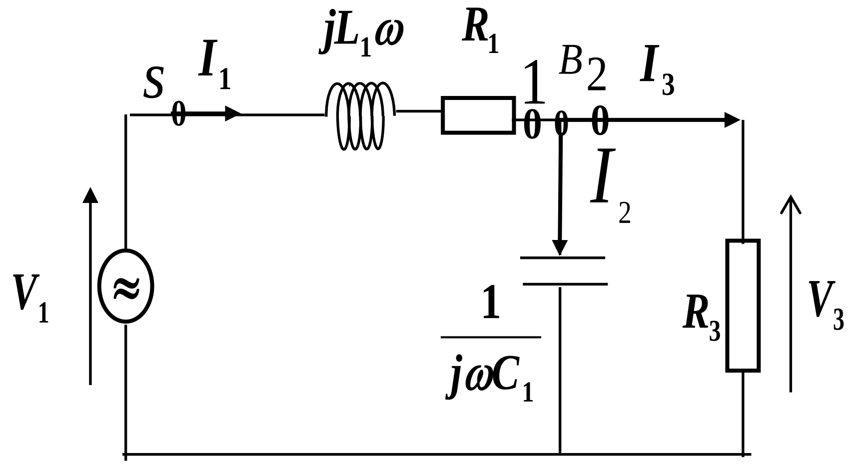
Théorème de Boucherot

$$P = \sum_{i=1}^{n} P_i ; Q = \sum_{i=1}^{n} Q_i ; \underline{S} = P \pm jQ = \sum_{i=1}^{n} P_i \pm j \sum_{i=1}^{n} Q_i$$

Exercice .6.2 : On considère le circuit ci-dessous et on donne $V_3 = 228{,}31V$. Calculer la tension V_1 .en utilisant la méthode de Boucherot



$$V_3 = 228{,}31 e^{j0} V ; R_1 = 1\Omega ; L_1\omega = 2\Omega ; \frac{1}{C_1\omega} = 400\Omega ; R_3 = 20\Omega$$

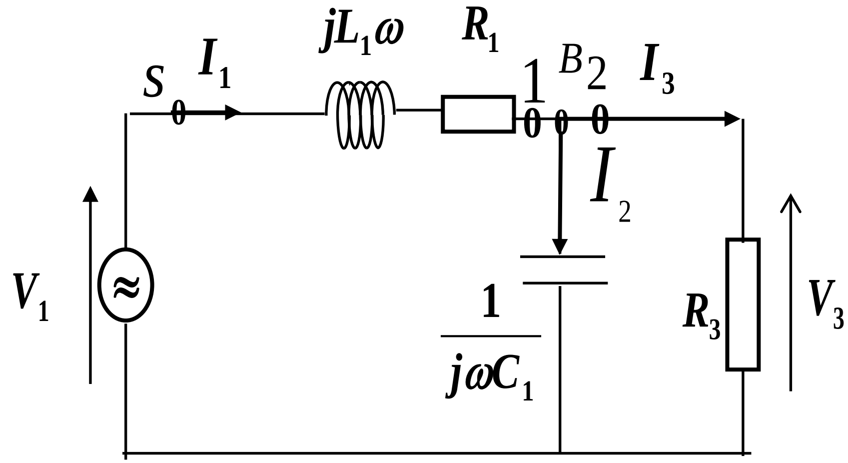


$$P_3 = \frac{V_3^{\ 2}}{R_3} = \frac{228{,}31^2}{20} = 2606{,}27W \qquad Q_3 = 0 \qquad S_3 = \sqrt{P^2{}_3 + Q^2{}_3} = V_3 \times I_3 = 2606{,}27VA$$

$$I_3 = \frac{S_3}{V_3} = 11{,}415A \qquad P_1 = 0 + P_3 = 2606{,}27W$$

$$Q_C = -C_1\omega V_3^{\ 2} = -\frac{228{,}31^2}{400} = -130{,}31VAR \qquad Q_1 = Q_C + Q_3 = -130{,}31VAR$$

$$S_1 = \sqrt{P^2{}_1 + Q^2{}_1} = V_3 \times I_1 = 2609{,}525VA \qquad I_1 = \frac{S_1}{V_3} = 11{,}428A$$



$$P_S = P_1 + R_1 I_1^{\,2} = 2609{,}525 + 1\times 11{,}424^2 = 2736{,}869W$$

$$Q_S = Q_1 + L_1\omega I_1^{\,2} = -130{,}31 + 2\times 11{,}428^2 = 130{,}88VAR$$

$$S_S = \sqrt{P_S^{\,2} + Q_S^{\,2}} = V_1 \times I_1 = \sqrt{2736{,}869^2 + 1130{,}88^2} = 2739.996VA$$

$$V_1 = \frac{S_S}{I_1} \cong 240V$$

<u>Importance du facteur de puissance</u>

le courant s'adapte suivant la relation $I = \dfrac{P}{V\cos\varphi}$

le facteur de puissance peut s'exprimer $\cos\varphi = \dfrac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}}$

$$\cos\varphi = f(Q)$$

En rajoutant à l'installation électrique des <u>condensateurs</u> on modifie Q sans modifier P.

<u>Problème économique</u>: plus I est faible plus les pertes sont faibles

Pour diminuer I sans modifier P ou V, il faut augmenter $\cos\varphi$

Relèvement du facteur de puissance

Si l'installation électrique est inductive, alors (Q > 0),

Pour diminuer Q , on ajoute des condensateurs ($Q_C < 0$) de telle sorte que $Q + Q_C < Q$

L'objectif est de <u>dimensionner le condensateur</u> en fonction du facteur de puissance recherché.

Le facteur de puissance recherché est: $\cos\varphi' > \cos\varphi$

$$Q_c = -C\omega V^2 = Q' - Q$$

$$-C\omega V^2 = P\tan\varphi' - P\tan\varphi$$

$$C = \frac{P \times (\tan\varphi - \tan\varphi')}{\omega \times V^2}$$

Exercice 7.2.

Exercice 7.2. Une installation électrique est alimentée en régime sinusoïdal monophasé de fréquence f = 50 Hz, sous la tension efficace V = 240 V. Elle comporte :

- 30 lampes de 100 W chacune
- 2 moteurs identiques, de puissance utile Pu = 1,9 kW, de rendement η = 0,95 et de facteur de puissance 0,7.

Ces récepteurs sont montés en parallèle et fonctionnent simultanément.

Exercice 7.2.

Calculer :

Les puissances active P et réactive Q de l'installation

Le facteur de puissance de l'installation

L'intensité I du courant en ligne

La capacité C du condensateur permettant de relever le facteur de puissance à 0,93.

L'intensité du courant en ligne après compensation

Avant compensation

Lampe :

$$P_l = 30 \times 100 = 3kW \rightarrow Q_l = P_l \times \tan\varphi = 3 \times 0 = 0 \rightarrow I_l = \frac{P}{V\cos\varphi} = \frac{3000}{240 \times 1} = 12{,}5A$$

Moteur : $\cos\varphi_m = 0{,}7 \rightarrow \tan\varphi_m = 1{,}02$

$$P_{absm} = \frac{P_u}{\eta_m} = \frac{2 \times 1{,}9}{0{,}95} = 4kW \rightarrow Q_m = P_{absm}\tan\varphi_m = 4 \times 1{,}02 = 4{,}08kVAR$$

$$I_m = \frac{P_{absm}}{V\cos\varphi_m} = \frac{4000}{240 \times 0{,}7} = 23{,}8A$$

Installation : $P_{inst} = 3 + 4 = 7kW \rightarrow Q_{inst} = Q_m = 4{,}08kVAR \rightarrow \tan\varphi_{inst} = \frac{Q_{inst}}{P_{inst}} = 0{,}583$

$$I_{inst} = \frac{P_{inst}}{V\cos\varphi_{inst}} = \frac{7000}{240 \times 0{,}86} = 33{,}8A$$

Après compensation

Condensateur

$\cos\varphi' = 0{,}93 \rightarrow \tan\varphi' = 0{,}395$ $\quad Q'_{inst} = P_{inst} \times \tan\varphi' = 2{,}77kVAR$

$$P_{cond} = 0 \rightarrow Q_{cond} = Q'_{inst} - Q_{inst} = 2{,}77 - 4{,}08 = -1{,}31kVAR$$

$$I_c = \frac{Q_c}{V\sin\varphi_c} = \frac{1310}{240 \times 1} = 5{,}46A \rightarrow \sin\varphi_c = -90^\circ$$

Installation :

$$Q' = P_{inst} \times \tan\varphi' = 2{,}77kVAR$$

$$I' = \frac{P_{inst}}{V\cos\varphi'} = \frac{7000}{240 \times 0{,}93} = 31{,}4A$$

$$C = \frac{P_{inst}\left(\tan\varphi_{inst} - \tan\varphi'\right)}{\omega V^2} = \frac{7000\left(0{,}583 - 0{,}395\right)}{314 \times 240^2} = 72{,}7\mu F$$

Avant compensation

récepteurs	P (kW)	Q(kVAR)	$cos\varphi$	$tan\varphi$	I (A)
lampes	3	0	1	0	12,5
Moteurs	4	+4,08	0,7	1,02	23,8
Installation	7	+4,08	0,86	0,583	33,8

Après compensation

récepteurs	P (kW)	Q (kVAR)	$cos\varphi$	$tan\varphi$	I (A)
lampes	3	0	1	0	12,5
Moteurs	4	+4,08	0,7	1,02	23,8
Condensateur	0	-1,31	0		5,46
Installation	7	2,77	0,93	0,395	31,4

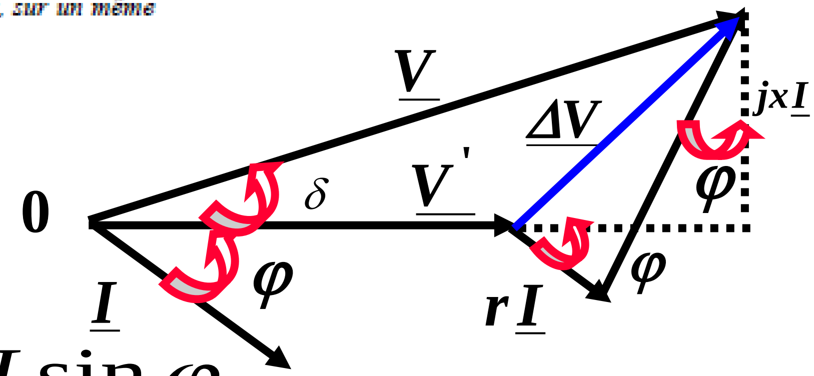
Chute de tension en ligne

Lorsqu'un circuit est traversé par un courant I, il y a chute de tension entre sa source et le récepteur

Or le bon fonctionnement d'un récepteur nécessite de limiter la chute de tension

Exercice 8.2 : Un récepteur résistif et inductif ci-dessous, ayant une tension V' à ses bornes, absorbe un courant I déphasé de φ en arrière sur cette tension. Ce récepteur est alimenté par une source de tension sinusoïdale V au moyen d'une ligne de résistance r et de réactance x. Tracez, sur un même graphe, les différentes tensions (Figure 8) et donnez l'expression de la chute de tension.

Exercice 8.2



$$V\cos\delta = V' + r_l I\cos\varphi + x_l I\sin\varphi$$

$$V\sin\delta = -r_l I\sin\varphi + x_l I\cos\varphi$$

$\delta \approx 0$

$$V = V' + r_l I\cos\varphi + x_l I\sin\varphi$$

$$V - V' = \Delta V = r_l I\cos\varphi + x_l I\sin\varphi$$

$$\boxed{\Delta V = r_l I\cos\varphi + x_l I\sin\varphi}$$

5- Méthode d'études des circuits électriques linéaires

1. Dans le cas général, c'est la tension aux bornes de la source qui est connue puisqu'elle est fixée par EDF

2. En pratique, on suppose la tension ou le courant dans le récepteur le plus en aval de la source égal à une valeur arbitraire

3. Tous les courants et toutes les tensions sont proportionnels

On corrige les valeurs des tensions avec $V_3^{réelle} = \left[\frac{V^{réelle}}{V^{calculée}}\right] \times V_3^{fixée}$

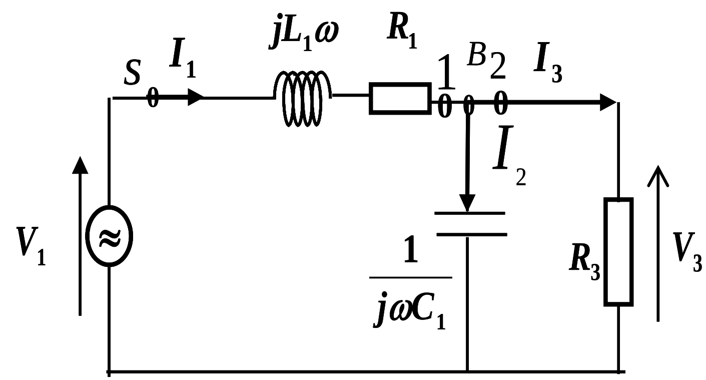
Il en est de même pour les courants $I_3^{réelle} = \left[\frac{V^{réelle}}{V^{calculée}}\right] \times I_3^{calculé}$

Pour toutes les puissances, on utilise le rapport au carré

$$P_3^{réelle} = \left[\frac{V^{réelle}}{V^{calculée}}\right]^2 \times P_3^{calculée} \qquad Q_3^{réelle} = \left[\frac{V^{réelle}}{V^{calculée}}\right]^2 \times Q_3^{calculée}$$

Exercice9.2 : On considère le circuit ci-dessous et on fixe $V_3 = 200V$. En se servant du rapport de la tension réelle sur la tension calculée déterminez V_3 et toutes les grandeurs électriques du circuit.

Exercice 9.2



$V_{3fixée}$ = 200 V

$$V_1 = 240e^{j0}V; R_1 = 1\Omega; L_1\omega = 2\Omega; \frac{1}{C_1\omega} = 400\Omega; R_3 = 20\Omega$$

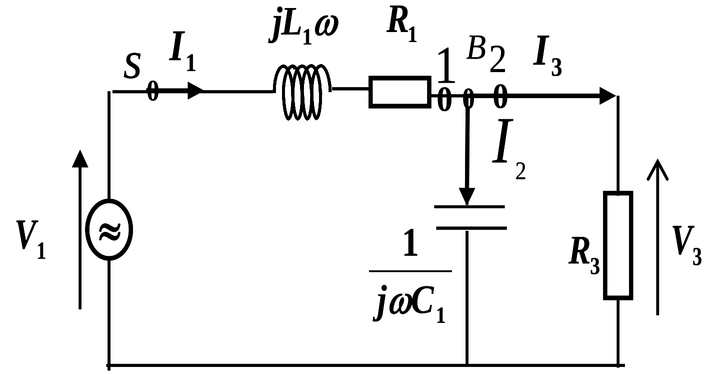
$$P_3 = \frac{V_3^{\ 2}}{R_3} = \frac{200^2}{20} = 2000W \qquad Q_3 = 0$$

$$S_3 = \sqrt{P^2_{\ 3} + Q^2_{\ 3}} = V_3 * I_3 = 2000VA \qquad I_3 = \frac{S_3}{V_3} = 10A$$

$$P_1 = 0 + P_3 = 2000W \qquad Q_1 = Q_C + Q_3 = -100VAR$$

$$S_1 = \sqrt{P^2_{\ 1} + Q^2_{\ 1}} = V_3 \times I_1 = 2002VA \qquad I_1 = \frac{S_1}{V_3} = 10A$$

Exercice 9.2



$V_{3fixée}$ = 200 V

$$V_1 = 240e^{j0}V; R_1 = 1\Omega; L_1\omega = 2\Omega; \frac{1}{C_1\omega} = 400\Omega; R_3 = 20\Omega$$

$$P_S = P_1 + R_1 I_1^{\,2} = 2000 + 1\times 10^2 = 2100W$$

$$Q_S = Q_1 + L_1\omega I_1^{\,2} = -100 + 2\times 10^2 = 100VAR$$

$$S_S = \sqrt{P_S^{\,2} + Q_S^{\,2}} = V_1 \times I_1 = \sqrt{2100^2 + 100^2} = 2102.38VA$$

$$V_1 = \frac{S_S}{I_1} = 210.24V$$

d'après nos calculs on trouve V_1égale à 210.24V, or la valeur réelle de V_1 est égale à 240V, d'où la nécessité de corriger les grandeurs V et I calculées

$$V_3 = 200 \times \frac{240}{210.24} = 228.31V$$

$$P_3 = 2000 \times \left(\frac{240}{210.24}\right)^2 = 2606.28W$$

$$Q_3 = 0$$

$$S_3 = 2000 \times \left(\frac{240}{210.24}\right)^2 = 2606.28VA$$

$$I_3 = 10 \times \frac{240}{210.24} = 11.42A$$

$$P_1 = 2606.28W$$

$$P_S = 2736.59W$$

$$Q_S = 130.31VAR$$

$$Q_1 = -130.31VAR$$

$$S_1 = 2609.79VA$$

$$S_S = 2739.69VA$$

$$I_1 = 11.4A$$

$$V_1 = 240V$$

Questions de cours

Q1. D’où vient l’énergie réactive ?

R1. L'énergie réactive est liée à l'utilisation de récepteurs inductifs (moteurs, transformateurs).

Q2. Quel élément permet de mesurer la consommation d’énergie réactive ?

R2. Le facteur de puissance cos φ ou la tan φ

Q3. Quel est le seuil de facturation d’EDF ?

R3. Cos φ=0.93 et tan φ =0.4.

Q4. Quel est l’intérêt d’un bon facteur de puissance cos φ ?

**R4. -Augmentation de la puissance disponible au secondaire du transformateur.
Diminution du courant véhiculé dans l'installation en aval du disjoncteur BT. Ceci entraîne la diminution des pertes par effet Joule dans les câbles**

Q5. Quelles sont les inconvénients de la circulation d’énergie réactive ?

**R5. Une grande puissance réactive donc un mauvais facteur de puissance (cosφ faible ou tgφ fort) nous pénalise sur :
Une diminution de la puissance active disponible au secondaire du transformateur alimentant l'installation**

**Le dimensionnement des câbles et de l’installation: Pertes importantes par échauffement.
Le courant appelé chez EDF: surfacturation. C’est pourquoi EDF sanctionne par une majoration tarifaire les clients ayant un mauvais cosφ.**

FIN